

Combien un polynôme a-t-il de racines réelles ?

Thomas Letendre

Séminaire pour tous – ICJ/UMPA – 11 mai 2015

Combien un polynôme a-t-il de racines ?

Théorème (d'Alembert – Gauss)

Un polynôme complexe de degré $d \in \mathbb{N}$ possède exactement d racines complexes, comptées avec multiplicités.

Génériquement (i.e. sur un ouvert dense), les racines de $P \in \mathbb{C}_d[X]$ sont simples et non réelles.

Pour $P \in \mathbb{R}_d[X]$ non nul, combien P a-t-il de racines réelles ?

- Entre 0 et d .
- Au moins une, si d est impair.
- Bien compris pour $d \leq 4$ (formules pour les racines).

Objectif

Trouver un comportement typique au sens de la mesure.

- 1 L'aiguille de Buffon, ou comment estimer π dans son salon
- 2 La formule de Crofton
- 3 Racines de polynômes aléatoires

L'aiguille de Buffon, ou comment estimer π dans son salon

Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon



Montbard 1707 – Paris 1788

Naturaliste, cosmologiste, philosophe et mathématicien français

Membre de l'Académie des sciences et de l'Académie française

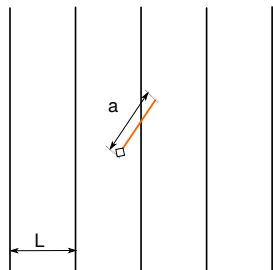
Auteur de l'*Histoire naturelle* (36 volumes)

L'aiguille de Buffon (1733)

Le problème

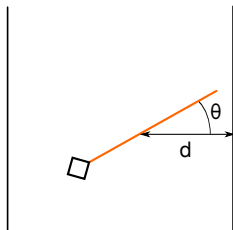
On lance une aiguille de longueur a sur un parquet dont les lattes sont de largeur $L > a$.

Quelle est la probabilité p que l'aiguille croise le bord d'une latte ?



- Position du milieu de l'aiguille : uniforme dans \mathbb{R}^2 .
- Orientation de l'aiguille : uniforme dans \mathbb{S}^1 .

L'aiguille de Buffon (1733)

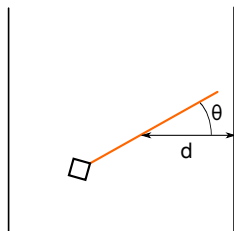


d la distance entre le milieu de l'aiguille et le bord le plus proche.

θ l'angle entre l'aiguille et l'horizontale.

$(d, \theta) \in [0, \frac{L}{2}] \times \mathbb{S}^1$ variable aléatoire de loi uniforme.

L'aiguille de Buffon (1733)

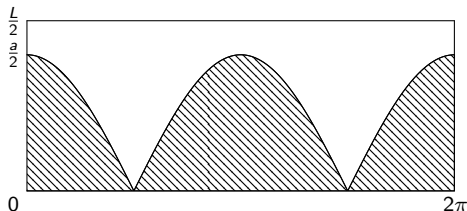


d la distance entre le milieu de l'aiguille et le bord le plus proche.

θ l'angle entre l'aiguille et l'horizontale.

$(d, \theta) \in [0, \frac{L}{2}] \times \mathbb{S}^1$ variable aléatoire de loi uniforme.

L'aiguille rencontre un bord si et seulement si $d \leq \frac{a}{2} |\cos(\theta)|$.



$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\pi L} \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} |\cos(t)| dt \\ &= \frac{2a}{\pi L}. \end{aligned}$$

Estimer π dans son salon (Laplace, 1812)



Pierre-Simon de Laplace

On pose $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'aiguille rencontre un bord,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

C'est une v.a. de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2a}{\pi L}$.

On fait N expériences indépendantes : X_1, \dots, X_N
v.a.i.i.d. et presque sûrement

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X] = \frac{2a}{\pi L}.$$

Estimer π dans son salon (Laplace, 1812)



Pierre-Simon de Laplace

On pose $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'aiguille rencontre un bord,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

C'est une v.a. de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2a}{\pi L}$.

On fait N expériences indépendantes : X_1, \dots, X_N v.a.i.i.d. et presque sûrement

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X] = \frac{2a}{\pi L}.$$

Une expérience en ligne

<http://experiences.math.cnrs.fr/simulations/coursera/AiguillesBuffon/index.html>

Crédits : Jean-René Chazottes et Marc Monticelli.

Estimer π dans son salon ...

Par l'inégalité de Chebyshev :

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \sum X_i - p \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{N\varepsilon^2} \text{Var}(X) = \frac{p(1-p)}{N\varepsilon^2}.$$

Par exemple pour $L = 2a$ et $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \sum X_i - p \right| > 10^{-2} \right) \leq \frac{(\pi - 1) 10000}{\pi^2 N} = C_N.$$

- $N = 1000$, $C_N \simeq 2.169 \dots$
- $N = 10000$, $C_N \simeq 0.216 \dots$
- $N = 30000$, $C_N \simeq 0.072 \dots$

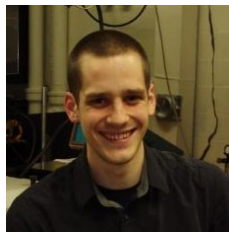
... sans arme à feu

Lecture conseillée

Dumoulin V., Thouin F., *A ballistic Monte Carlo approximation of π* ,
arXiv:1404.1499



Vincent Dumoulin



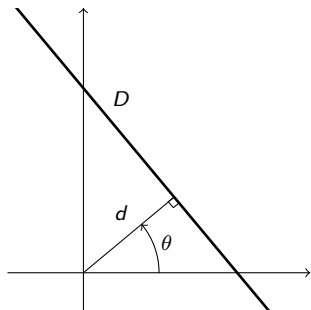
Félix Thouin

La formule de Crofton

La grassmannienne des droites affines du plan

Définitions

On note $\text{Gr}(1, 2) = \{\text{droites affines de } \mathbb{R}^2\}$, et plus généralement $\text{Gr}(k, n) = \{\text{sous-espaces affines de dimension } k \text{ de } \mathbb{R}^n\}$.



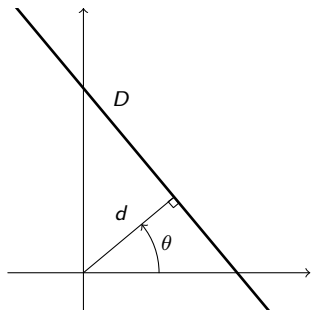
Une droite $D \in \text{Gr}(1, 2)$ est repérée par :

- sa distance d à l'origine,
- l'angle θ entre l'horizontale et D^\perp .

La grassmannienne des droites affines du plan

Définitions

On note $\text{Gr}(1, 2) = \{\text{droites affines de } \mathbb{R}^2\}$, et plus généralement $\text{Gr}(k, n) = \{\text{sous-espaces affines de dimension } k \text{ de } \mathbb{R}^n\}$.



Une droite $D \in \text{Gr}(1, 2)$ est repérée par :

- sa distance d à l'origine,
- l'angle θ entre l'horizontale et D^\perp .

$$\text{Gr}(1, 2) = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) / (d, \theta) \sim (-d, \theta + \pi)$$

La mesure $dx \otimes d\theta$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ induit une mesure $d\mu$ sur le quotient.

Invariance par isométries

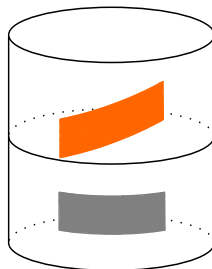
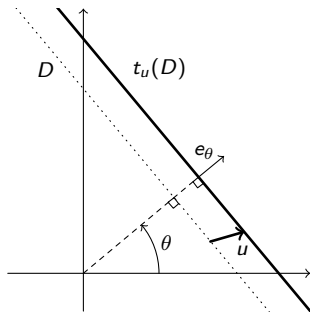
Les mesures $dx \otimes d\theta$ et $d\mu$ sont invariantes sous l'action des isométries affines de \mathbb{R}^2 .

- s la réflexion par rapport à l'axe des abscisses : $s(d, \theta) = (d, -\theta)$,
- r_α la rotation de centre 0 et d'angle α : $r_\alpha(d, \theta) = (d, \theta + \alpha)$,

Invariance par isométries

Les mesures $dx \otimes d\theta$ et $d\mu$ sont invariantes sous l'action des isométries affines de \mathbb{R}^2 .

- s la réflexion par rapport à l'axe des abscisses : $s(d, \theta) = (d, -\theta)$,
- r_α la rotation de centre 0 et d'angle α : $r_\alpha(d, \theta) = (d, \theta + \alpha)$,
- t_u translation de vecteur u : $t_u(d, \theta) = (d + \langle e_\theta, u \rangle, \theta)$.



La formule de Crofton (1826 – 1915)

Théorème (Crofton)

Soit \mathcal{C} une courbe rectifiable de \mathbb{R}^2 de longueur finie,

$$\frac{1}{4} \int_{D \in \text{Gr}(1,2)} \text{card}(D \cap \mathcal{C}) d\mu = \text{long}(\mathcal{C}).$$

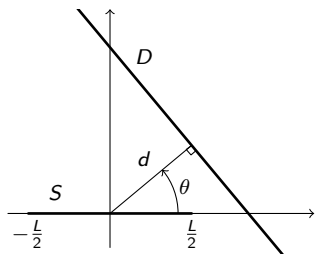
La formule de Crofton (1826 – 1915)

Théorème (Crofton)

Soit \mathcal{C} une courbe rectifiable de \mathbb{R}^2 de longueur finie,

$$\frac{1}{4} \int_{D \in \text{Gr}(1,2)} \text{card}(D \cap \mathcal{C}) d\mu = \text{long}(\mathcal{C}).$$

Pour un segment S de longueur L , on peut supposer $S = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \times \{0\}$ (invariance par isométrie).



$$\text{On a } D \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \left(\frac{d}{\cos(\theta)}, 0 \right).$$

$$\text{card}(D \cap S) = \begin{cases} 1 & \text{si } |d| \leq \frac{L}{2} |\cos(\theta)|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

Pour un segment de longueur L :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \int_{D \in \text{Gr}(1,2)} \text{card}(D \cap S) d\mu &= \frac{1}{4} \int_{\{|d| \leq \frac{L}{2} |\cos(\theta)|\}} dx \otimes d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{L}{2} |\cos(\theta)|}^{\frac{L}{2} |\cos(\theta)|} dx \right) d\theta \\ &= L.\end{aligned}$$

Pour une ligne brisée : on somme sur les segments.

Pour une courbe rectifiable : par approximation par des lignes brisées.

En plus grande dimension

Sur $\text{Gr}(k, n)$ il existe une mesure $d\mu_{k,n}$ invariante par l'action des isométries affines de \mathbb{R}^n (unique à une constante près).

Soit M une sous-variété compacte de dimension $n - k$ de \mathbb{R}^n .
Pour presque tout $V \in \text{Gr}(k, n)$, $M \cap V$ est un ensemble fini.

Formule de Crofton

Il existe une constante $C_{k,n} > 0$ telle que :

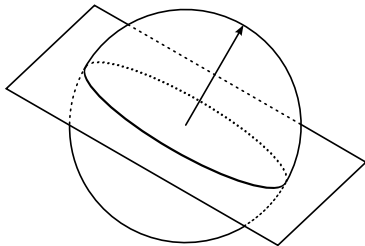
$$\frac{1}{C_{k,n}} \int_{V \in \text{Gr}(k,n)} \text{card}(M \cap V) d\mu_{k,n} = \text{Vol}(M)$$

pour toute sous-variété compacte M de \mathbb{R}^n .

Une formule de Crofton sur la sphère

Soit $a \in \mathbb{S}^n$, l'équateur défini par a est $E_a = a^\perp \cap \mathbb{S}^n$.

Si a est un v.a. uniforme dans \mathbb{S}^n , E_a est un équateur aléatoire de loi invariante sous l'action de $O_{n+1}(\mathbb{R})$.

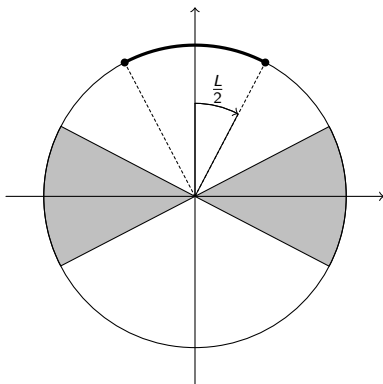


Formule de Crofton

Soit \mathcal{C} courbe rectifiable sur \mathbb{S}^n de longueur finie. Alors $E_a \cap \mathcal{C}$ est fini presque sûrement et :

$$\mathbb{E}[\text{card}(E_a \cap \mathcal{C})] = \frac{1}{\pi} \text{long}(\mathcal{C}).$$

Pour un arc de grand cercle de longueur L



$$\mathbb{E}[\text{card}(E_a \cap \mathcal{C})] = \frac{\text{Vol}(\text{surface grise})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} = \frac{2L}{2\pi}.$$

Racines de polynômes aléatoires

Un premier résultat

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ avec a_0, \dots, a_d des gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Rappel

C'est-à-dire $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ est un vecteur aléatoire dans \mathbb{R}^{d+1} et sa loi admet la densité

$$a \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{d+1}} \exp\left(-\frac{\|a\|^2}{2}\right)$$

par rapport à Lebesgue.

En particulier, la distribution de a est invariante sous l'action de $O_{d+1}(\mathbb{R})$. De plus, P est à racines simples presque sûrement.

Un premier résultat

Combien P a-t-il de racines réelles en moyenne ?



Marc Kac

Théorème (Kac, 1943)

$$\mathbb{E}[\text{card}(Z_P)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(t^2 - 1)^2} - \frac{(d+1)t^{2d}}{(t^{2d+2} - 1)^2}} dt$$
$$\sim \frac{2}{\pi} \ln(d).$$

Une preuve géométrique

Référence

Edelman A., Kostlan E., *How many zeros of a random polynomial are real?*, Bull. Amer. Math. Soc., 1995.

Soient $m_d : t \mapsto (1, t, t^2, \dots, t^d)$, la *courbe des moments*, et $\gamma_d = \frac{m_d}{\|m_d\|}$.
On a :

$$P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k = \langle a, m_d(t) \rangle.$$

Une preuve géométrique

Référence

Edelman A., Kostlan E., *How many zeros of a random polynomial are real?*, Bull. Amer. Math. Soc., 1995.

Soient $m_d : t \mapsto (1, t, t^2, \dots, t^d)$, la *courbe des moments*, et $\gamma_d = \frac{m_d}{\|m_d\|}$.
On a :

$$P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k = \langle a, m_d(t) \rangle.$$

$P(t) = 0$ si et seulement si $\left\langle \frac{a}{\|a\|}, \frac{m_d(t)}{\|m_d(t)\|} \right\rangle = 0$. Donc

$$Z_P = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \gamma_d(t) \in E_{\frac{a}{\|a\|}} \right\},$$
$$\text{card}(Z_P) = \text{card} \left(E_{\frac{a}{\|a\|}} \cap \gamma_d(\mathbb{R}) \right).$$

Une preuve géométrique

Si a est un vecteur gaussien centré réduit, alors $\frac{a}{\|a\|}$ est uniforme dans \mathbb{S}^d .

Alors

$$\mathbb{E}[\text{card}(Z_P)] = \mathbb{E}\left[\text{card}\left(E_{\frac{a}{\|a\|}} \cap \gamma_d(\mathbb{R})\right)\right] = \frac{1}{\pi} \text{long}(\gamma_d(\mathbb{R})).$$

Une preuve géométrique

Si a est un vecteur gaussien centré réduit, alors $\frac{a}{\|a\|}$ est uniforme dans \mathbb{S}^d .
Alors

$$\mathbb{E}[\text{card}(Z_P)] = \mathbb{E}\left[\text{card}\left(E_{\frac{a}{\|a\|}} \cap \gamma_d(\mathbb{R})\right)\right] = \frac{1}{\pi} \text{long}(\gamma_d(\mathbb{R})).$$

Lemme

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\gamma'_d(t)\| = \sqrt{\frac{1}{(t^2 - 1)^2} - \frac{(d+1)t^{2d}}{(t^{2d+2} - 1)^2}}.$$

Harder, better, faster, stronger

Soient f_0, f_1, \dots, f_d des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} lisses. On suppose la famille libre et sans zéro commun.

On note $m_f : t \mapsto (f_0(t), \dots, f_d(t))$ et $\gamma_f = \frac{m_f}{\|m_f\|}$.

Soient $f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_d f_d$ avec a_0, \dots, a_d des gaussiennes centrées réduites indépendantes et $Z_f = f^{-1}(0)$.

Théorème (Edelman – Kostlan, 1995)

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\text{card}(Z_f \cap I)] = \frac{1}{\pi} \text{long}(\gamma_f(I)) = \frac{1}{\pi} \int_I \|\gamma_f'(t)\| dt.$$

Retour aux polynômes

Pour la famille $f_k : t \mapsto \sqrt{\binom{d}{k}} t^k$ avec $0 \leq k \leq d$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\gamma'_f(t)\| = \frac{\sqrt{d}}{1+t^2}.$$

Théorème (Kostlan, 1993)

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k \sqrt{\binom{d}{k}} X^k$ avec a_0, \dots, a_d des gaussiennes centrées réduites indépendantes, on a :

$$\mathbb{E}[\text{card}(Z_P)] = \sqrt{d}.$$

Une mesure plus naturelle

Choisir un polynôme aléatoire $P = \sum a_k X^k$ avec les a_k normaux centrés indépendants et $\text{Var}(a_k) = \binom{d}{k}$ est géométriquement plus naturel.

Une mesure plus naturelle

Choisir un polynôme aléatoire $P = \sum a_k X^k$ avec les a_k normaux centrés indépendants et $\text{Var}(a_k) = \binom{d}{k}$ est géométriquement plus naturel.

- 1 Le résultat est plus simple.
- 2 La densité moyenne de racines réelles $t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ est uniforme

Une mesure plus naturelle

Choisir un polynôme aléatoire $P = \sum a_k X^k$ avec les a_k normaux centrés indépendants et $\text{Var}(a_k) = \binom{d}{k}$ est géométriquement plus naturel.

- 1 Le résultat est plus simple.
- 2 La densité moyenne de racines réelles $t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ est uniforme sur $\mathbb{R}P^1$.
- 3 Cette distribution est invariante par isométries de $\mathbb{R}P^1$.

La distribution de Kostlan

Soit P un polynôme aléatoire homogène de degré d en $n + 1$ variables :

$$P = \sum_{\alpha_0 + \dots + \alpha_n = d} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}.$$

On dit que P suit la *distribution de Kostlan* si les a_α sont des gaussiennes centrées indépendantes et pour tout $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $\text{Var}(a_\alpha) = \frac{d!}{\alpha_0! \dots \alpha_n!}$.

Théorème (Kostlan, 1993)

Soient P_1, \dots, P_r des polynômes aléatoire i.i.d de loi de Kostlan et Z_P le lieu de leurs zéros communs dans $\mathbb{R}P^n$.

Z_P est presque sûrement une sous-variété lisse de $\mathbb{R}P^n$ de codimension r et

$$\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_P)] = \left(\sqrt{d}\right)^r.$$

Merci de votre attention

Des questions ?